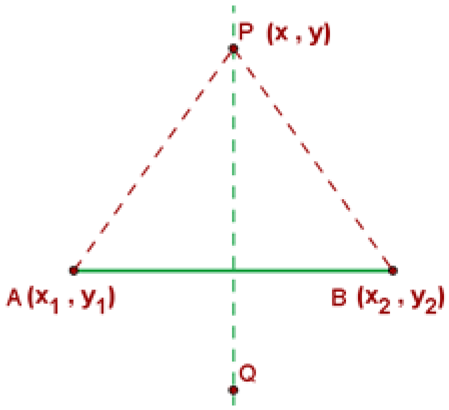
Lugar Geométrico

Se llama **lugar geométrico** a un conjunto de puntos que cumplen una determinada propiedad.

Mediatriz

Mediatriz de un segmento es el **lugar geométrico** de los **puntos del plano** que **equidistan** de los **extremos**.



Ecuación de la mediatriz

$$d(P, A) = d(P, B)$$

$P(x, y)$ $\qquad$ $A(x_1, y_1)$ $\qquad$ $B(x_2, y_2)$

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2} = \sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}$$

Ejemplo:

Obtén la ecuación de la mediatriz del segmento de extremos $A(2, 3)$ y $B(4, 1)$.

Los puntos $P(x,y)$ de la mediatriz cumplen que: $dist\ (P, A) = dist\ (P, B)$, es decir:

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2} = \sqrt{(x-4)^2+(y-1)^2}$$

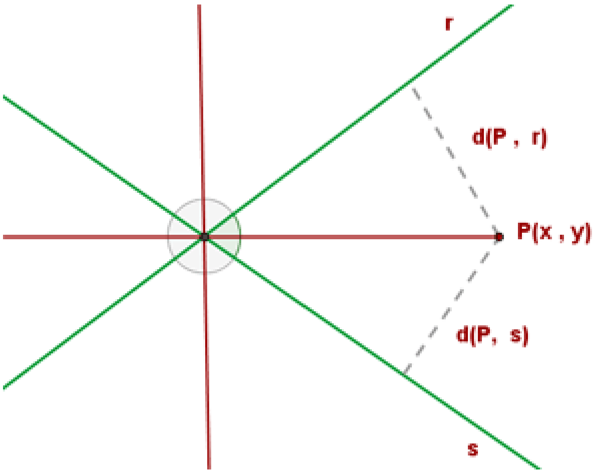
Elevamos al cuadrado en los dos miembros y operamos:

$$x^2-4x+4+y^2-6y+9 = x^2-8x+16+y^2-2y+1$$
$$4x-4y-4=0 \qquad \to \qquad x-y-1=0$$

Es una recta perpendicular al segmento AB, que pasa por su punto medio.

Ecuaciones de las bisectrices

La bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de las rectas que forman el ángulo.



$$d(P,r) = d(P,s)$$

$$r \equiv A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

$$s \equiv A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

$$P(x,y)$$

$$\frac{|A_1x + B_1y + C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{|A_2x + B_2y + C_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

Ejemplo

Halla la ecuación de las bisectrices de los ángulos formados por las rectas

r_1: $x + 3y - 1 = 0$ y r_2: $3x - y + 4 = 0$.

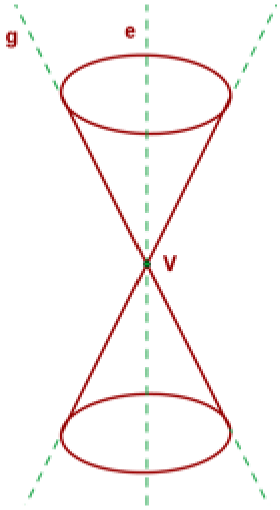
Los puntos $P(x, y)$ de las bisectrices cumplen que: *dist* $(P, r_1) =$ *dist* (P, r_2), es decir:

$$\frac{|x+3y-1|}{\sqrt{10}} = \frac{|3x-y+4|}{\sqrt{10}}$$

$$|x+3y-1| = |3x-y+4| \begin{cases} x+3y-1 = 3x-y+4 \rightarrow 2x-4y+5=0 \\ x+3y-1 = -3x+y-4 \rightarrow 4x+2y+3=0 \end{cases}$$

Son dos rectas perpendiculares entre sí, que se cortan en el mismo punto que r_1 y r_2.

Cónicas



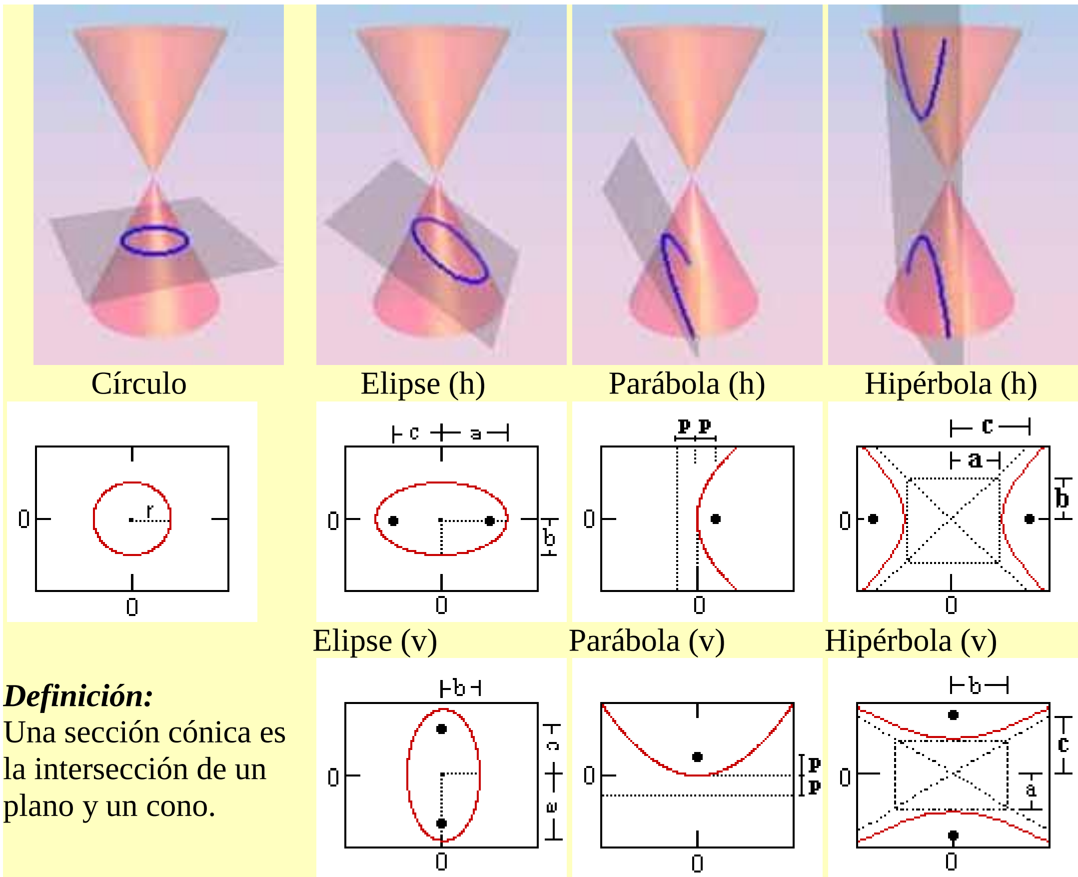
Una **superficie cónica** de revolución está engendrada por la rotación de una recta alrededor de otra recta fija, llamada **vértice**, a la que corta de modo oblicuo.

La **generatriz** es una cualquiera de las rectas oblicuas.

El **vértice** es el punto central donde se cortan las generatrices.

Se denomina **sección cónica** a la curva intersección de un cono con un plano que no pasa por su vértice.

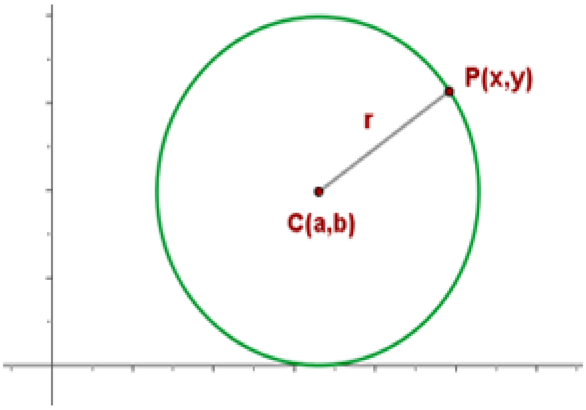
Cambiando el ángulo y el lugar de la intersección, podemos crear un círculo, un elipse, una parábola o una hipérbola.



Definición:
Una sección cónica es la intersección de un plano y un cono.

Circunferencia

Se llama circunferencia al **lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro**.



$$d(C,P) = r$$

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

Elevando al cuadrado obtenemos la ecuación:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Si desarrollamos:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

y realizamos estos cambios:

$$A = -2a \qquad B = -2b \qquad C = a^2 + b^2 - r^2$$

Obtenemos otra forma de escribir la ecuación:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + ($$

Donde el centro es: $C\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$

y el radio cumple la relación:

$$r^2 = \left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C$$

Ecuación reducida de la circunferencia

Si el centro de la circunferencia coincide con el origen de coordenadas la ecuación queda reducida a:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Ejemplos:

1.- Escribir la ecuación de la circunferencia de centro (3, 4) y radio 2.

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 4$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 4$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$$

2.- Dada la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$, hallar el centro y el radio.

$$-2 = -2a \qquad a = 1$$

$$C(1, -2)$$

$$4 = -2b \qquad b = -2$$

$$C = a^2 + b^2 - r^2 \qquad -4 = 1 + 4 - r^2 \qquad r = 3$$

3.- Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A(2,0), B(2,3), C(1, 3).

Si sustituimos x e y en la ecuación $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

por las coordenadas de los puntos se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} 4 + 0 + 2A + 0 + C = 0 \\ 4 + 9 + 2A + 3B + C = 0 \\ 1 + 9 + A + 3B + C = 0 \end{cases}$$

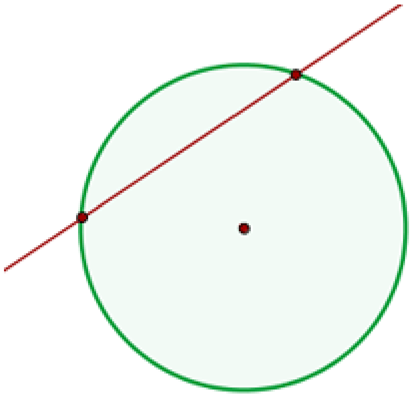
$$A = -3 \qquad B = -3 \qquad C = 2$$

$$x^2 + y^2 - 3x - 3y + 2 = 0$$

Intersección de una cónica y una recta

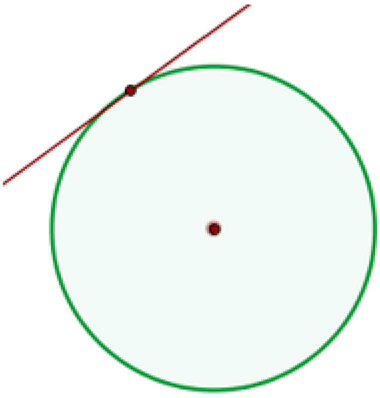
Para hallar los puntos comunes a una cónica y una recta **resolveremos el sistema formado por las ecuaciones de ambas**.

En general se obtiene un ecuación de segundo grado, que tendrá dependiendo del signo del discrimínante, $\Delta = b^2 - 4ac$, las siguientes soluciones:



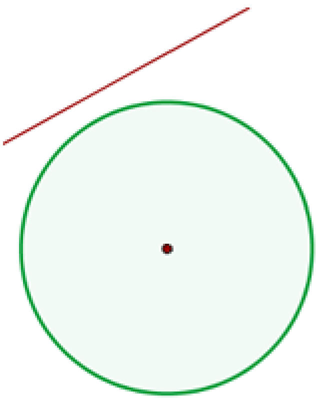
1 Si **Δ > 0**

Dos soluciones: la recta y la cónica son secantes.



2 Si **Δ = 0**

Una solución: la recta y la cónica son tangentes.



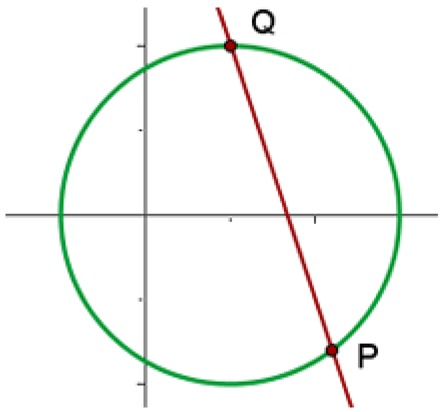
3 Si **Δ < 0**

Ninguna solución: la recta y la cónica son exteriores.

Ejemplo:

Calcula la posición relativa de la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$

y la recta $3x + y - 5 = 0$.



$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0 \\ 3x + y - 5 = 0 \end{cases} \qquad y = 5 - 3x$$

$$x^2 + (5 - 3x)^2 - 2x - 3 = 0$$

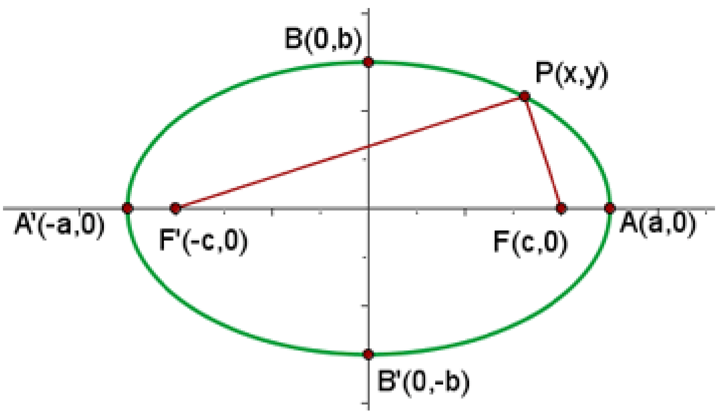
$$5x^2 - 16x + 11 = 0$$

$$x = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 220}}{10} = \frac{16 \pm 6}{10} \begin{matrix} \nearrow x_1 = \frac{11}{5} \\ \searrow x_2 = 1 \end{matrix}$$

$$P\left(\frac{11}{5}, -\frac{8}{5}\right) \qquad Q(1,2)$$

La elipse

Es el **lugar geométrico** de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante.



Elementos de la elipse

Focos Son los puntos fijos **F y F'**.

Eje focal Es la recta que pasa por los focos.

Eje secundario Es la mediatriz del segmento FF'.

Centro Es el punto de intersección de los ejes.

Radios vectores Son los segmentos que van desde un punto de la elipse a los focos: **PF** y **PF'**.

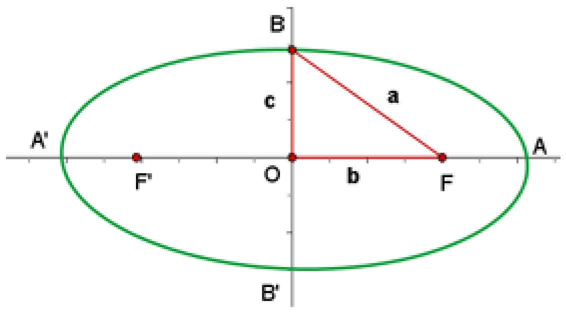
Distancia focal Es el segmento $\overline{FF'}$ de longitud **2c**, **c** es el valor de la **semidistancia focal**.

Vértices Son los puntos de intersección de la elipse con los ejes: A, A', B y B'.

Eje mayor Es el segmento $\overline{AA'}$ de longitud **2a**, **a** es el valor del **semieje mayor**.

Eje menor Es el segmento $\overline{BB'}$ de longitud **2b**, **b** es el valor del **semieje menor**.

Relación entre la distancia focal y los semiejes

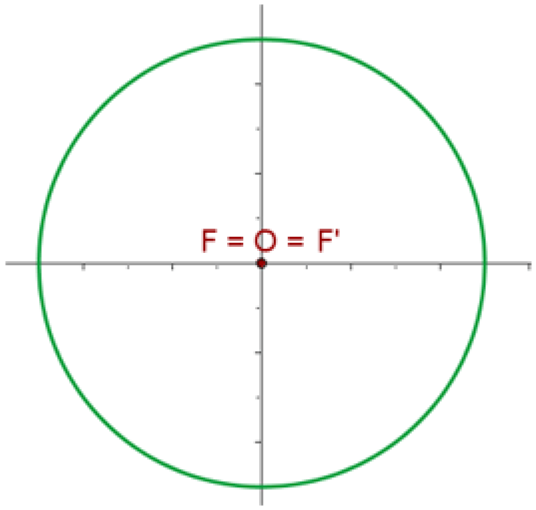


$$a^2 = b^2 + c^2$$

Excentricidad de la elipse

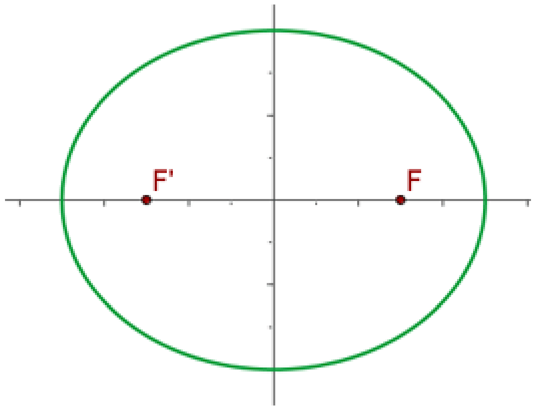
Es un número que mide el mayor o menor achatamiento de la elipse. Y es igual al cociente entre su semidistancia focal y su semieje mayor.

$$e = \frac{c}{a} \qquad c \leq a \qquad 0 \leq e \leq 1$$

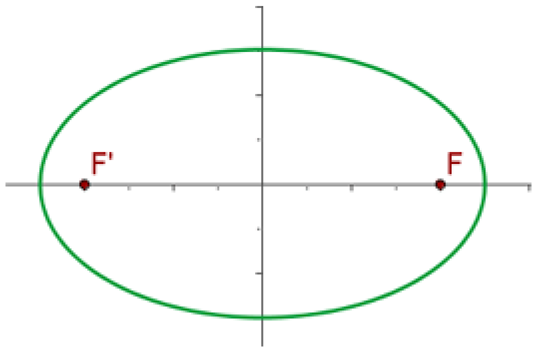


$c = 0 \qquad b = a$

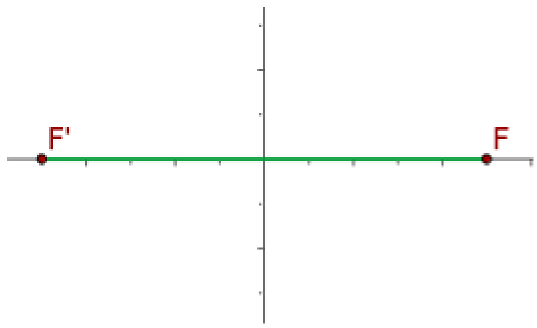
$e = 0$



$e = \frac{3}{5}$



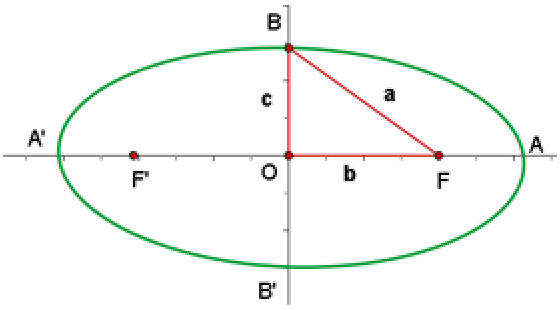
$e = \frac{4}{5}$



$c = a \qquad b = 0$

$e = 1$

Ecuación reducida de la elipse



Tomamos como centro de la elipse el centro de coordenadas y los ejes de la elipse como ejes de coordenadas. Las coordenadas de los focos son: **F'(-c,0) y F(c,0)**

Cualquier punto de la elipse cumple:

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a$$

Esta expresión da lugar a:

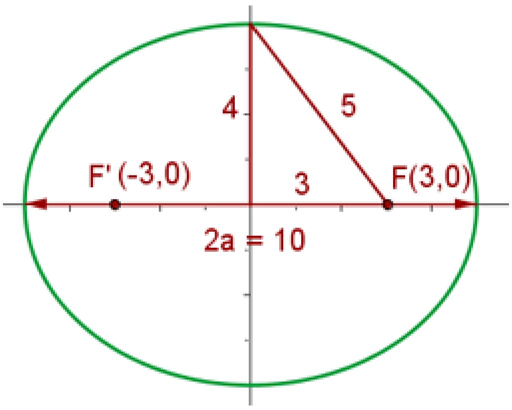
$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

Realizando las operaciones llegamos a:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

<u>Ejemplo:</u>

Hallar los elementos característicos y la ecuación reducida de la elipse de focos: F'(-3,0) y F(3, 0), y su eje mayor mide 10.



Semieje mayor

$$2a = 10 \qquad a = 5$$

Semidistancia focal

$$\overline{FF'} = 2c = 6 \qquad c = 3$$

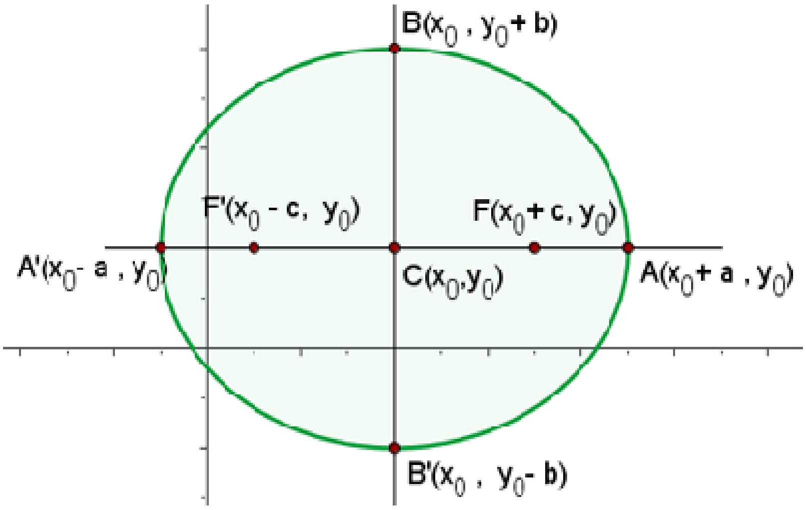
Semieje menor

$$b^2 = 25 - 9 \qquad b = 4$$

Ecuación reducida $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ $\qquad e = \frac{3}{5}$

Ecuación de la elipse

Si el centro de la elipse **C(x_0,y_0)** y el eje principal es paralelo a OX, los focos tienen de coordenadas **F(X_0+c, y_0) y F'(X_0-c, y_0)**. Y la ecuación de la elipse será:



$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

Al quitar denominadores y desarrollar se obtiene, en general, una ecuación de la forma:

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$$

Donde **A y B tienen el mismo signo**.

Ejemplos:

1.- Hallar la ecuación de la elipse de foco F(7, 2), de vértice A(9, 2) y de centro C(4, 2).

$a=9-4=5$ $\qquad$ $c=7-4=3$

$b=\sqrt{25-9}=4$

$$\frac{(x-4)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$$

2.- Dada la elipse de ecuación: $\frac{(x-6)^2}{36}+\frac{(y+4)^2}{16}=1$ hallar su centro, semiejes, vértices y focos.

$a^2 = 36 \qquad a = 6$

$b^2 = 16 \qquad b = 4$

$c = \sqrt{36-16} = \sqrt{20} \qquad c = 2\sqrt{5}$

$C(6, -4)$

$A(12, -4) \qquad A'(0, -4)$

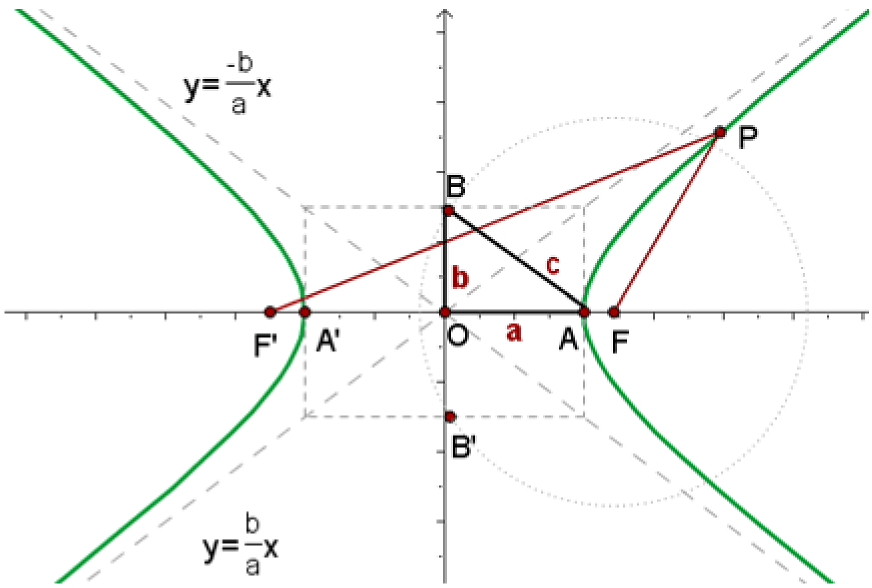
$F(6+2\sqrt{5}, -4) \qquad F'(6-2\sqrt{5}, -4)$

$B(6, 0) \qquad B'(6, -8)$

La hipérbola

Es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante.

$$\overline{PF} - \overline{PF'} = 2a$$



Elementos de la hipérbola

Focos Son los puntos fijos F y F'.

Eje focal Es la recta que pasa por los focos.

Eje secundario o imaginario Es la mediatriz del segmento $\overline{FF'}$.

Centro Es el punto de intersección de los ejes.

Vértices Los puntos A y A' son los puntos de intersección de la hipérbola con el eje focal.

Los puntos B y B' se obtienen como intersección del eje imaginario con la circunferencia que tiene por centro uno de los vértices y de radio c.

Radios vectores Son los segmentos que van desde un punto de la hipérbola a los focos: PF y PF'.

Distancia focal Es el segmento $\overline{FF'}$ de longitud 2c.

Eje mayor Es el segmento AA' de longitud 2a.

Eje menor Es el segmento BB' de longitud 2b.

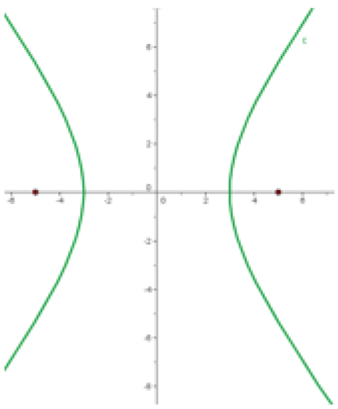
Asíntotas Son las rectas de ecuaciones: $y = -\frac{b}{a}x\ ,\ \ y = \frac{b}{a}x$

Relación entre los semiejes $c^2 = a^2 + b^2$

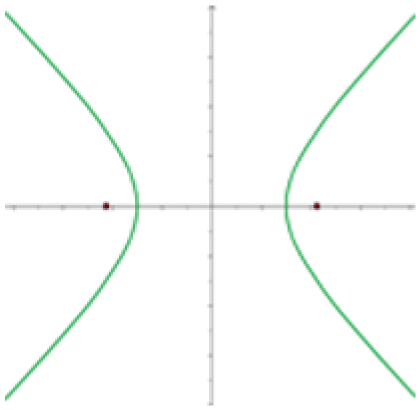
Excentricidad de la hipérbola

La excentricidad mide la abertura mayor o menor de las ramas de la hipérbola.

$$e = \frac{c}{a} \qquad c \geq a \qquad e \geq 1$$

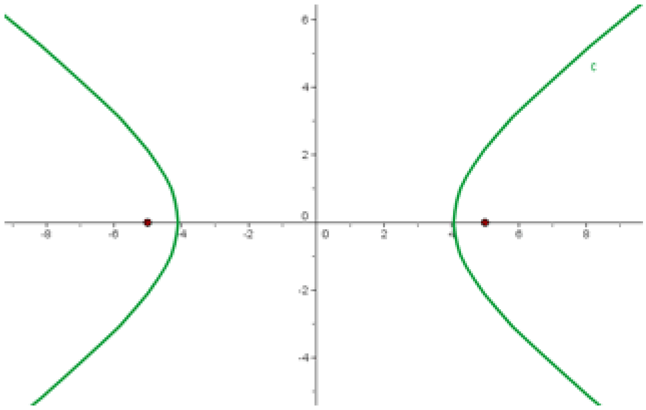


$$e = \frac{5}{3}$$

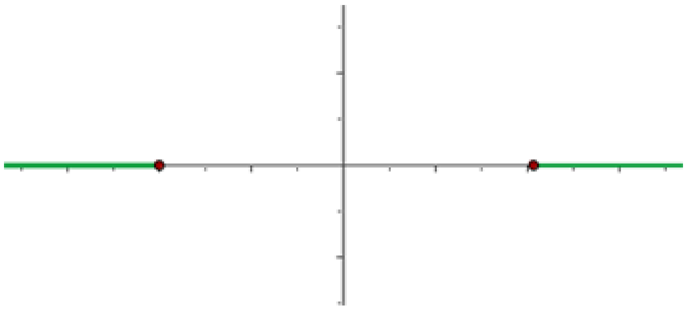


$$e = \sqrt{2}$$

Hipérbola equilátera

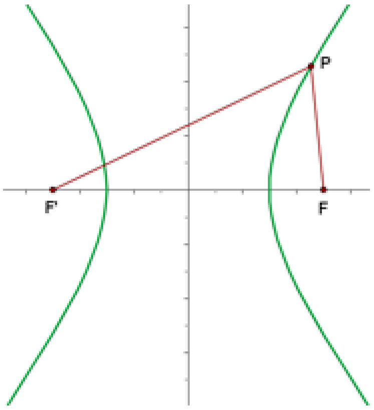


$$e = \frac{5}{4}$$



$$e = 1$$

Ecuación reducida de la hipérbola



Se llama ecuación reducida a la ecuación de la hipérbola cuyos ejes coinciden con los ejes coordenadas, y, por tanto, el centro de hipérbola con el origen de coordenadas.

Si el eje real está en el eje de abscisas las coordenadas de los focos son:

F'(-c,0) y F(c,0)

Cualquier punto de la hipérbola cumple:

$$\overline{PF} - \overline{PF'} = 2a$$

Esta expresión da lugar a:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

Realizando las operaciones llegamos a:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

<u>Ejemplos:</u>

1.- Hallar la ecuación de la hipérbola de foco F(4, 0), de vértice A(2, 0) y de centro C(0, 0).

$$C(0,0), \qquad F(4,0), \qquad A(2,0)$$

$$a = 2 \qquad c = 4 \qquad b = \sqrt{16-4} = 2\sqrt{3}$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

2.- Hallar la ecuación y la excentricidad de la hipérbola que tiene como focos los puntos F'(-5, 0) y F(5, 0), y 6 como diferencia de los radios vectores.

$2a = 6 \qquad a = 3$

$c = 5 \qquad b = \sqrt{25 - 9} \qquad b = 4$

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \qquad e = \frac{5}{3}$$

3.- Hallar las coordenadas de los vértices y de los focos, las ecuaciones de las asíntotas y la excentricidad de la hipérbola $9x^2 - 16y^2 = 144$.

$$\frac{9x^2}{144} - \frac{16y^2}{144} = \frac{144}{144}$$

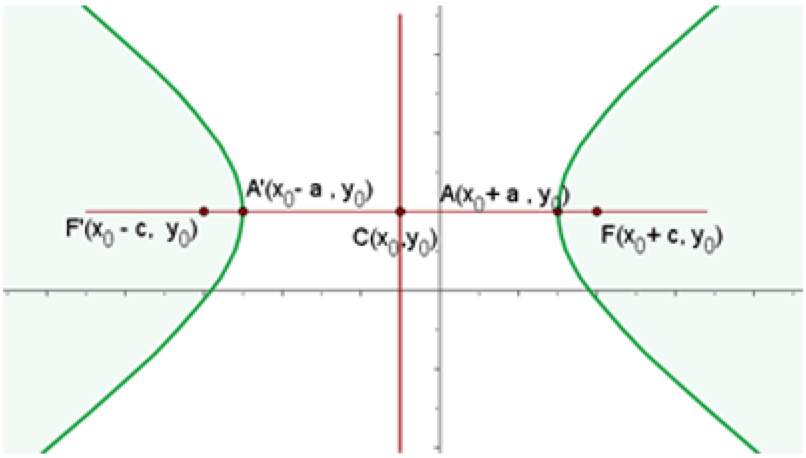
$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$A(4, 0) \qquad A' = (-4, 0)$

$F = (5, 0) \qquad F' = (-5, 0)$

$$y = \frac{3}{4}x \qquad y = -\frac{3}{4}x \qquad e = \frac{5}{4}$$

Ecuación de la hipérbola con eje paralelo a OX, y centro distinto al origen



Si el **centro** de la hipérbola es **C(x_0, y_0)** y el eje principal es paralelo a OX, los **focos** tienen de coordenadas **F(X_0+c, y_0) y F'(X_0-c, y_0)**. Y la ecuación de la hipérbola será:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

Al quitar denominadores y desarrollar las ecuaciones se obtiene, en general, una ecuación de la forma:

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$$

Donde **A y B tienen signos opuestos**.

Ejemplo:

1.- Hallar la ecuación de la hipérbola de foco F(7, 2), de vértice A (5,2) y de centro C(3, 2).

$C(3,2),\qquad F(7,2),\qquad A(5,2)$

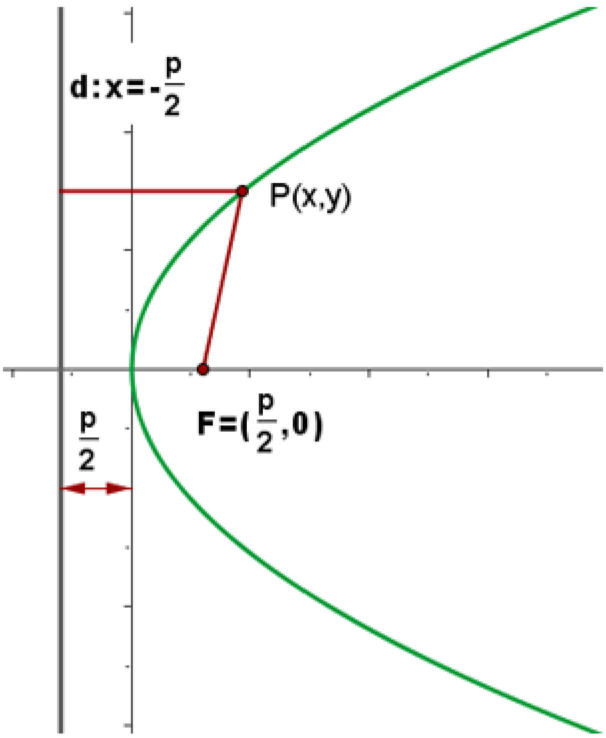
$a=5-3=2\qquad\qquad c=7-3=4$

$b=\sqrt{16-4}=2\sqrt{3}\qquad\qquad \frac{(x-3)^2}{4}-\frac{(y-2)^2}{12}=1$

La parábola

La parábola es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado foco y de una recta fija llamada directriz.

$$d(F,P)=d(P,d)$$



Elementos de la parábola

Foco Es el punto fijo F.

Directriz Es la recta fija D.

Parámetro Es la distancia del foco a la directriz, se designa por la letra p.

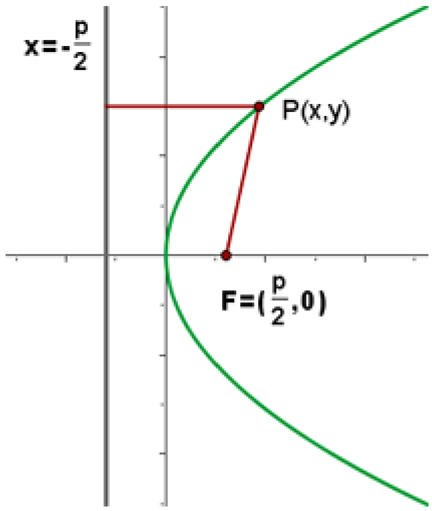
Eje Es la recta perpendicular a la directriz que pasa por el foco.

Vértice Es el punto de intersección de la parábola con su eje.

Radio vector Es un segmento que une un punto cualquiera de la parábola con el foco.

Ecuación reducida de la parábola

El eje de la parábola coincide con el de abscisas y el vértice con el origen de coordenadas

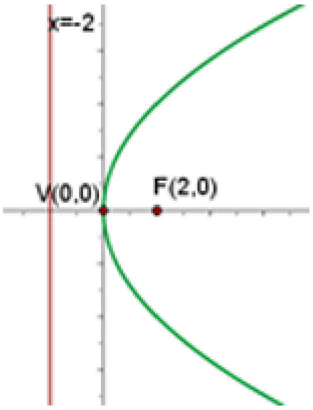


$$F\left(\frac{p}{2}, 0\right) \qquad x = -\frac{p}{2}$$

$$y^2 = 2px$$

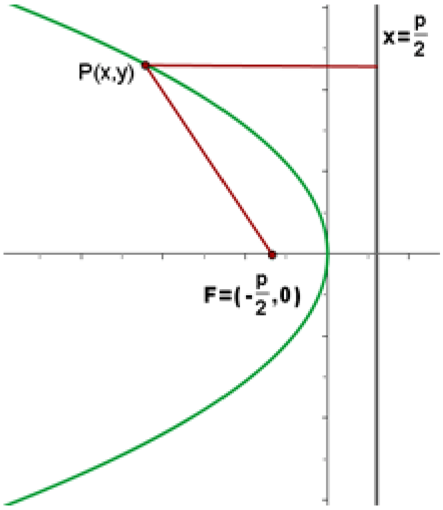
Ejemplo:

Dada la parábola, $y^2 = 8x$ calcular su vértice, su foco y la recta directriz.



$$2p = 8 \qquad \frac{p}{2} = 2$$

$$V(0,0) \qquad F(2,0) \qquad x = -2$$

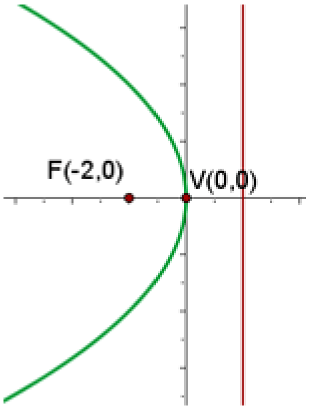


$$F\left(-\frac{p}{2},0\right) \qquad x=\frac{p}{2}$$

$$y^2=-2px$$

<u>Ejemplo:</u>

Dada la parábola, $y^2=-8x$ calcular su vértice, su foco y la recta directriz.

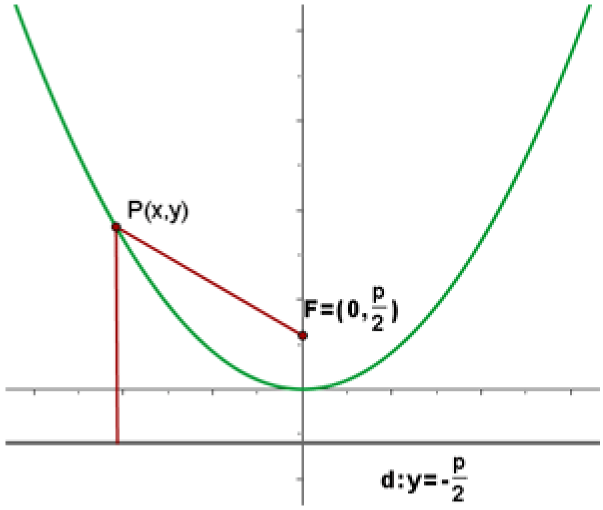


$$2p=8 \qquad \frac{p}{2}=2$$

$$V(0,0) \qquad F(-2,0) \qquad x=2$$

Ecuación reducida de la parábola de eje vertical

El eje de la parábola coincide con el de ordenadas y el vértice con el origen de coordenadas

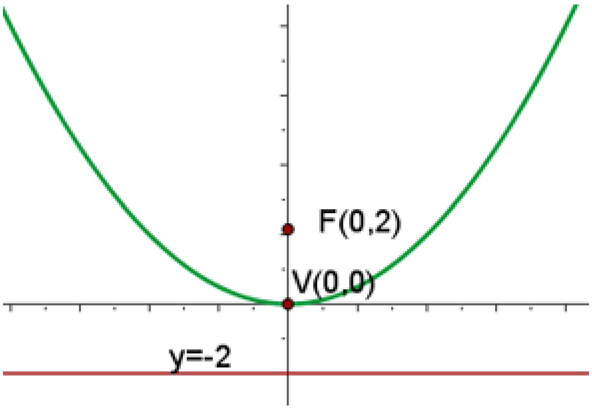


$$F\left(0,\frac{p}{2}\right) \qquad y = -\frac{p}{2}$$

$$x^2 = 2py$$

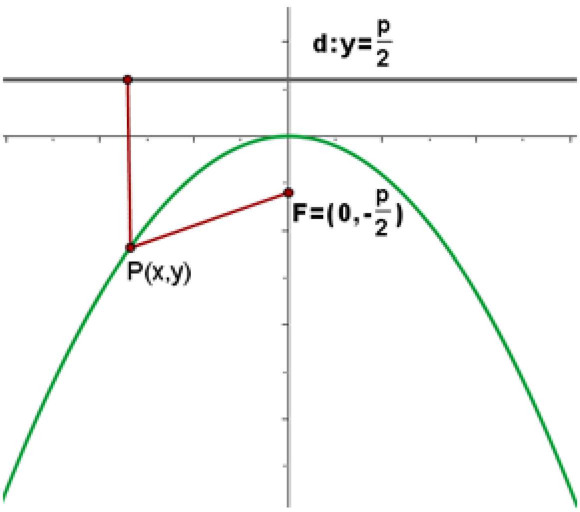
Ejemplo:

Dada la parábola, $x^2 = 8y$ calcular su vértice, su foco y la recta directriz.



$$2p = 8 \qquad \frac{p}{2} = 2$$

$$V(0,0) \qquad F(0,2) \qquad y = -2$$

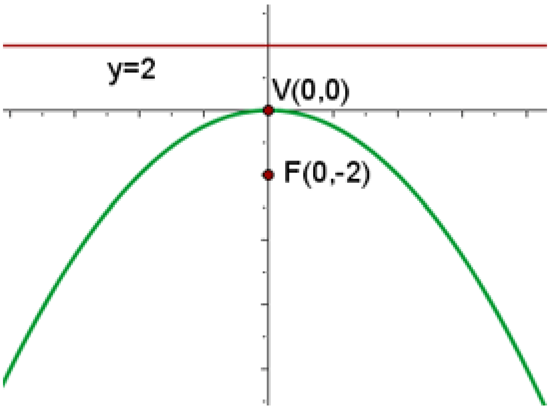


$$F\left(0,-\frac{p}{2}\right) \qquad y = \frac{p}{2}$$

$$x^2 = -2py$$

Ejemplo:

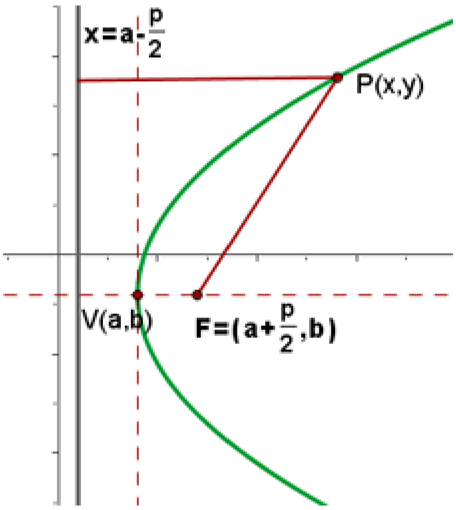
Dada la parábola, $x^2 = -8y$ calcular su vértice, su foco y la recta directriz.



$2p = 8$ $\qquad$ $\frac{p}{2} = 2$

$V(0,0)$ $\qquad$ $F(0,-2)$ $\qquad$ $y = 2$

Parábola con eje paralelo a OX y vértice distinto al origen

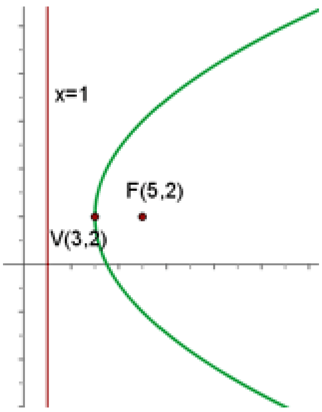


$V(a,b)$ $\qquad$ $F(a+\frac{p}{2}, b)$ $\qquad$ $x = a - \frac{p}{2}$

$$(y-b)^2 = 2p(x-a)$$

Ejemplo:

Dada la parábola, $(y-2)^2 = 8(x-3)$ calcular su vértice, su foco y la recta directriz.

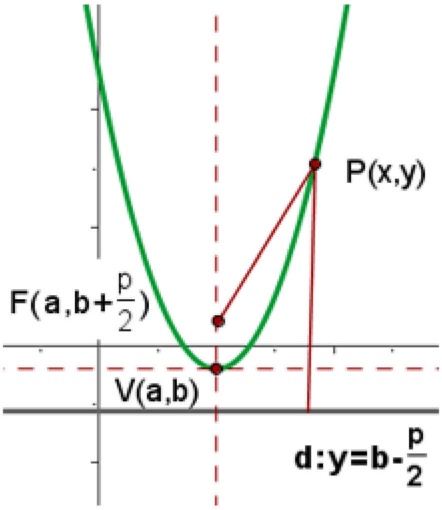


$2p = 8$ $\qquad$ $\frac{p}{2} = 2$

$V(3,2)$ $\qquad$ $F(5,2)$ $\qquad$ $x = 1$

Ecuación de la parábola de eje vertical

Parábola con eje paralelo a OY, y vértice distinto al origen

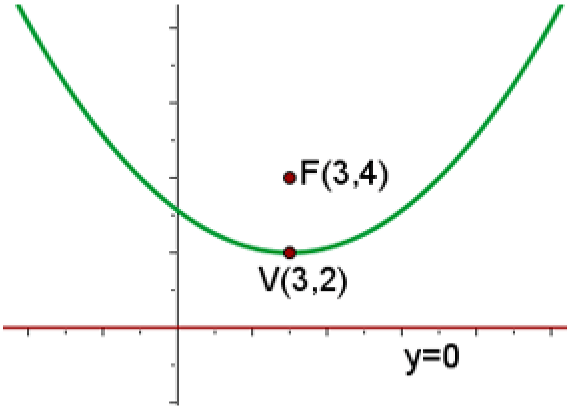


$V(a,b)$ $F(a,b+\frac{p}{2})$ $y=b-\frac{p}{2}$

$$(x-a)^2=2p(y-b)$$

<u>Ejemplo:</u>

Dada la parábola, $(x-3)^2=8(y-2)$ calcular su vértice, su foco y la recta directriz.



$2p=8$ $\frac{p}{2}=2$

$V(3,2)$ $F(3,4)$ $y=0$